Stavební mechanika

2 – Vektory a skaláry

Miloslav Smutek – RECOC s.r.o.

Zopakování některých základních znalostí z matematiky:

Trigonometrie:

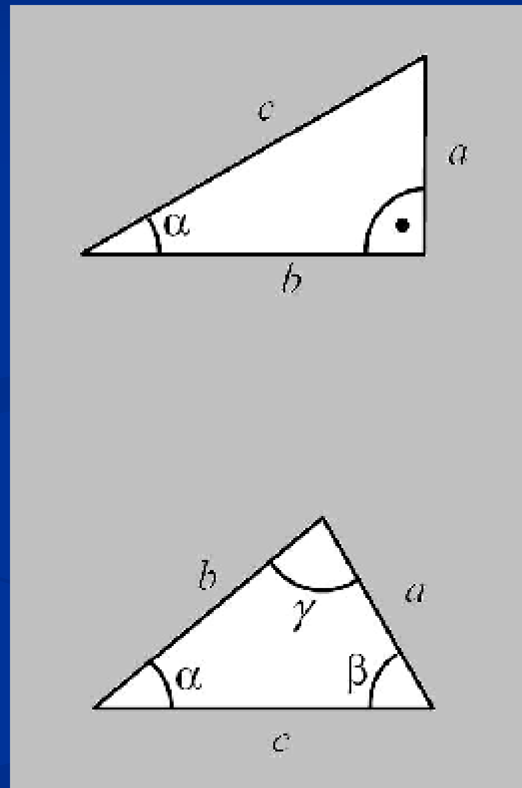
Pravoúhlý trojúhelník

$\sin a = a/c$
$\cos a = b/c$
$\tan a = a/b$

Obecný trojúhelník

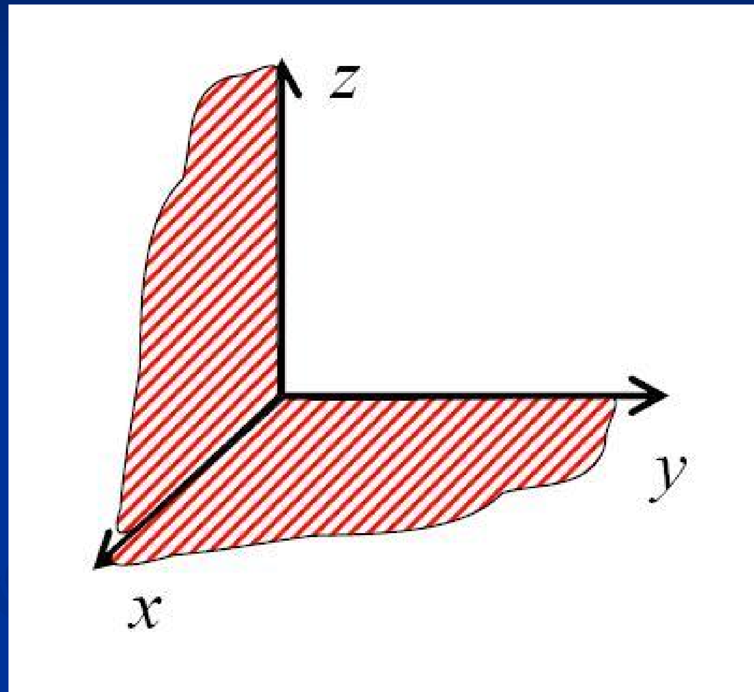
Sinová věta:
$a : b : c = \sin a : \sin b : \sin g$

Kosinová věta:
$a^2 = b^2 + c^2 – 2.b.c.\cos a$
$b^2 = a^2 + c^2 – 2.a.c.\cos b$
$c^2 = a^2 + b^2 – 2.a.b.\cos g$



Zopakování některých základních znalostí z matematiky:

Kartézský souřadný systém:



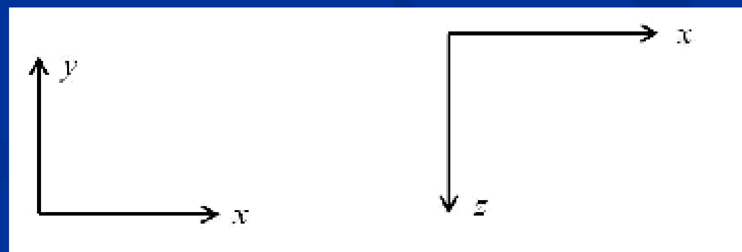
Souřadnicový systém v prostoru:

n Soustava tří vzájemně kolmých os – *x, y, z*
n Pravotočivá soustava - pootočení

x à y v kladném smyslu kolem z
y à z v kladném smyslu kolem x
z à x v kladném smyslu kolem y

Souřadnicový systém v rovině:

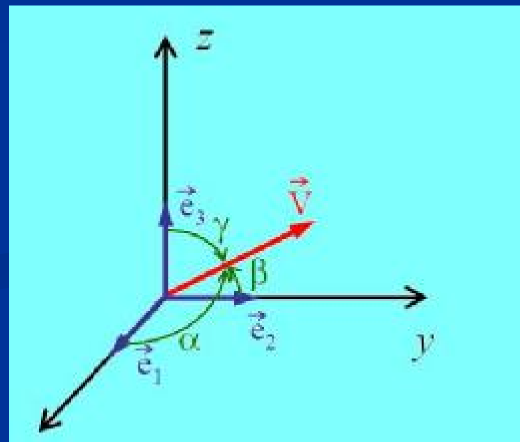
n Soustava dvou vzájemně kolmých os – *x, y*



Skaláry a vektory:

Skalár:
- Veličina definovaná pouze svou velikostí, nezávisle na volbě souřadnicového systému

Vektor $\vec{V}$:
- **Veličina daná velikostí, směrem a orientací**
- **Vždy je vztažena k nějakému souřadnicovému systému**



Bázové vektory (souřadnicové vektory) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:
- Jednotkové (velikost = 1) v kladných směrech souřadnicových os

Směrové úhly a, b, g :
- Úhly mezi kladnými souřadnicovými poloosami a vektorem $\vec{V}$
- Platí $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g$

Vyjádření vektoru prostřednictvím složek:

- Složky jsou kolmé průměty vektoru do směrů souřadnicových os
- $\vec{V} = \{V_x; V_y; V_z\}$

- Vyjádření pomocí směrových úhlů:

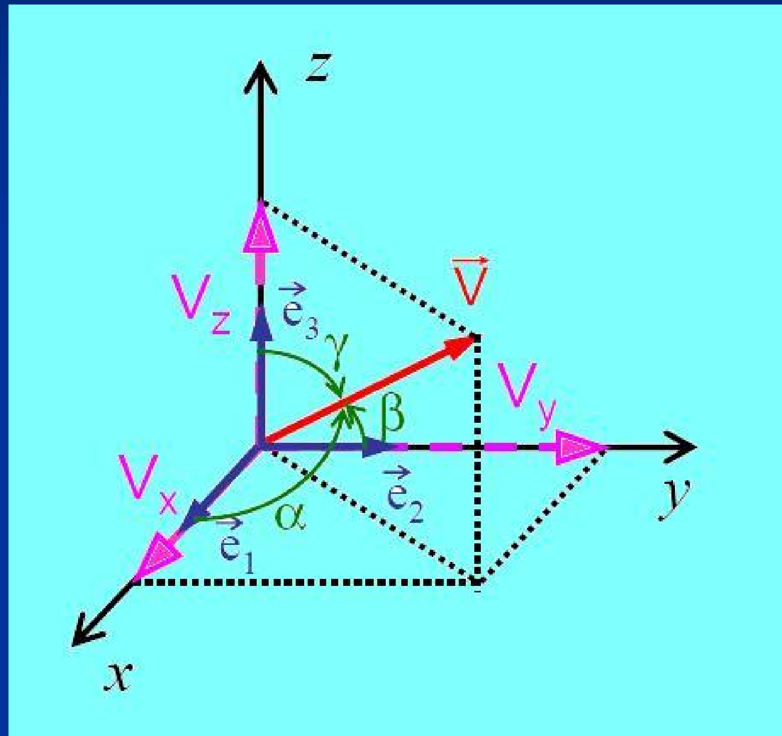
  $V_x = V \cos \alpha$
  $V_y = V \cos \beta$
  $V_z = V \cos \gamma$

- V je délka (velikost) vektoru $\vec{V}$:

  $V = |V| = (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)^{1/2}$

- Bázové vektory:

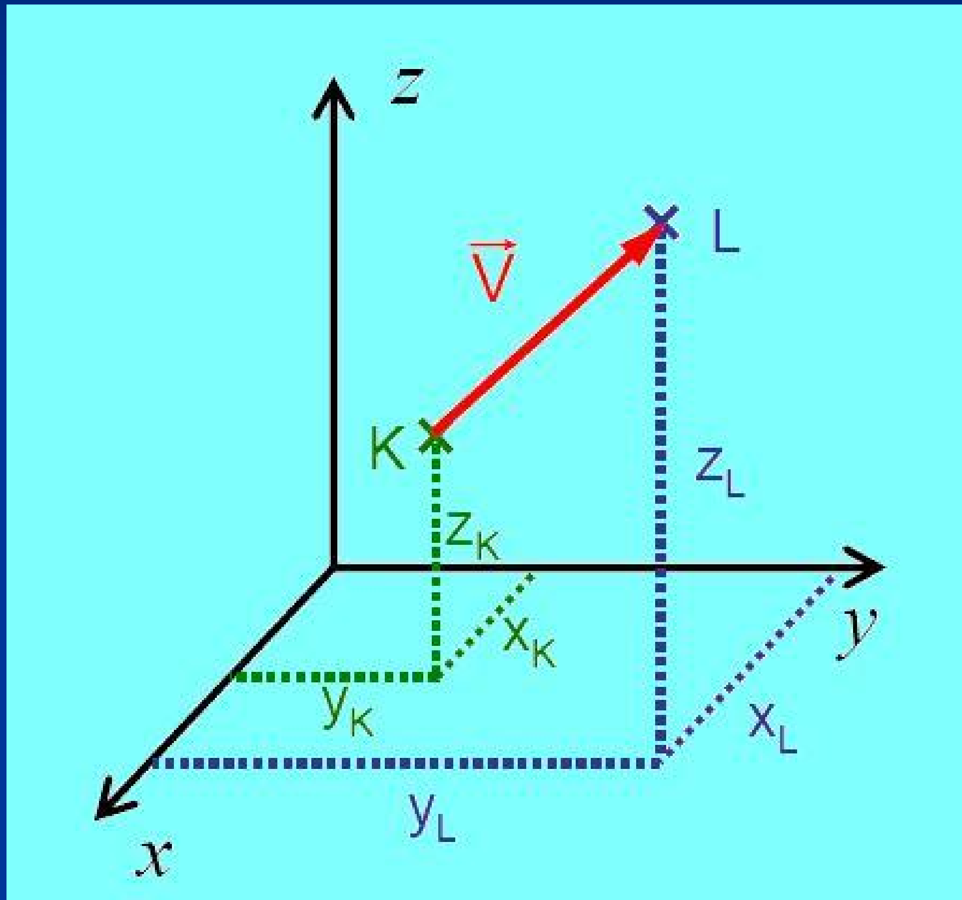
  $\vec{e}_1 = \{1; 0; 0\}$, $\vec{e}_2 = \{0; 1; 0\}$, $\vec{e}_3 = \{0; 0; 1\}$



Miloslav Smutek

Vektor určený dvěma body:

- $K\,[\,x_K;\ y_K;\ z_K\,]$
- $L\,[\,x_L;\ y_L;\ z_L\,]$
- $V = KL = \{x_L - x_K;\ y_L - y_K;\ z_L - z_K\}$

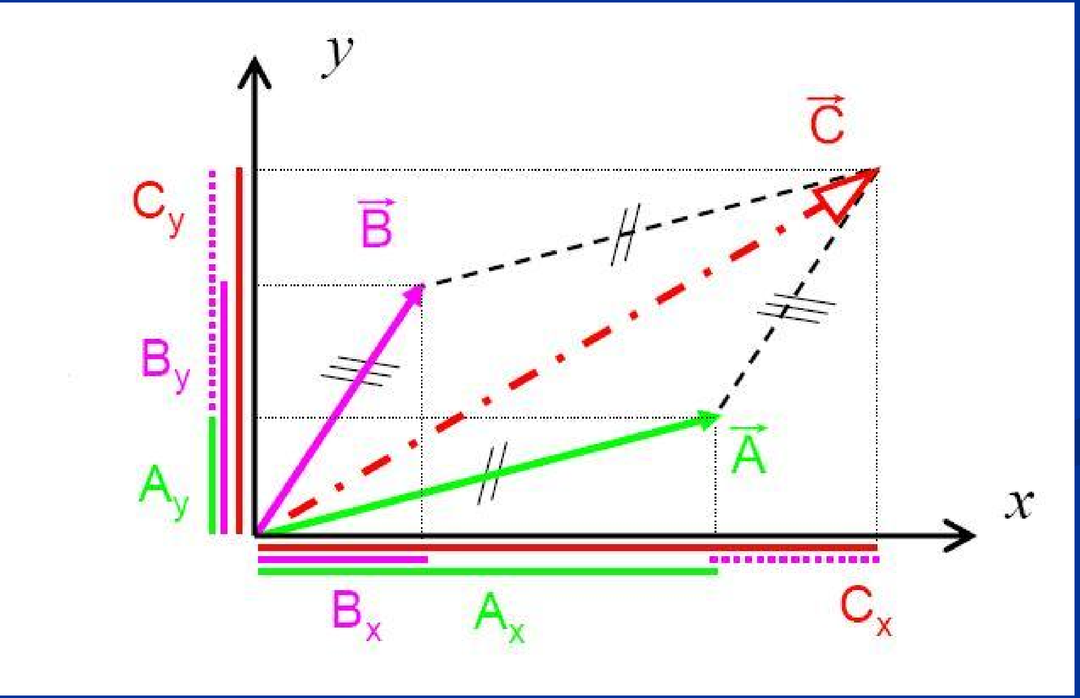


Operace s vektory:

Součet vektorů $\vec{A}$ a $\vec{B}$ je vektor $\vec{C}$

Pro vektor $\vec{C}$ platí: $\vec{C} = \{ A_x + B_x; A_y + B_y; A_z + B_z\}$

- Zápis: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$
- Vlastnosti: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- Geometrický význam:



Operace s vektory:

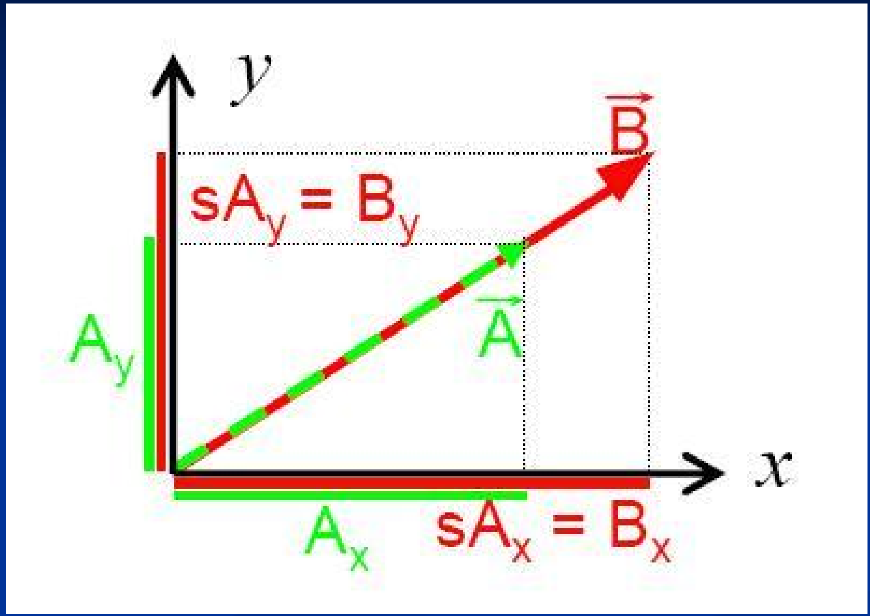
Součin skaláru s a vektoru $\vec{A}$ je vektor $\vec{B}$

Pro vektor $\vec{B}$ platí: $\vec{B} = \{ sA_x; sA_y; sA_z \}$

- Zápis: $\vec{B} = s\vec{A}$
- Vlastnosti: $s\vec{A} = \vec{A}s$

  vektory $\vec{A}$ a $\vec{B}$ jsou rovnoběžné

  velikost $B = (s^2A_x^2 + s^2A_y^2 + s^2A_z^2)^{1/2} = s A$
- Geometrický význam: viz obrázek



Operace s vektory:

Použití skalárního součinu:
Vyjádření složek jednotkového vektoru $\vec{f}$ ležícího v paprsku daném dvěma body K [x_K, y_K, z_K] a L [x_L, y_L, z_L]:

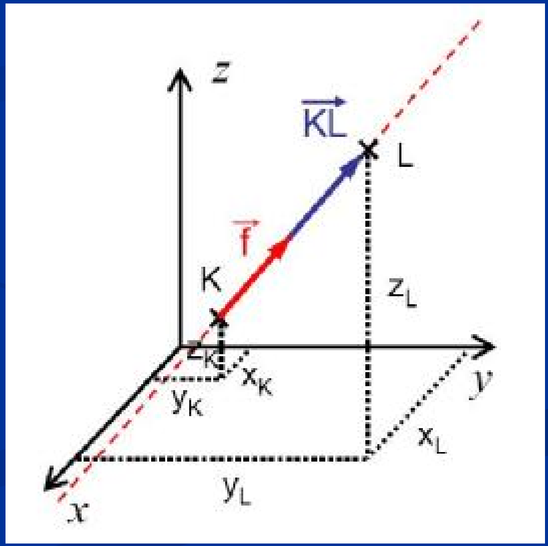
$$\vec{f} = \{f_x; f_y; f_z\} \quad ; \; |\vec{f}| = \mathrm{f} = 1 \qquad \overrightarrow{KL} = \{x_L - x_K; y_L - y_K; z_L - z_K\}$$

$$|\overrightarrow{KL}| = \sqrt{(x_L - x_K)^2 - (y_L - y_K)^2 - (z_L - z_K)^2} \neq 1$$

Pro získání jednotkového vektoru přenásobíme vektor skalárem

$$\vec{f} = \frac{1}{|\overrightarrow{KL}|}\overrightarrow{KL}$$

$$f_x = \frac{x_L - x_K}{|\overrightarrow{KL}|}; \quad f_y = \frac{y_L - y_K}{|\overrightarrow{KL}|}; \quad f_z = \frac{z_L - z_K}{|\overrightarrow{KL}|};$$

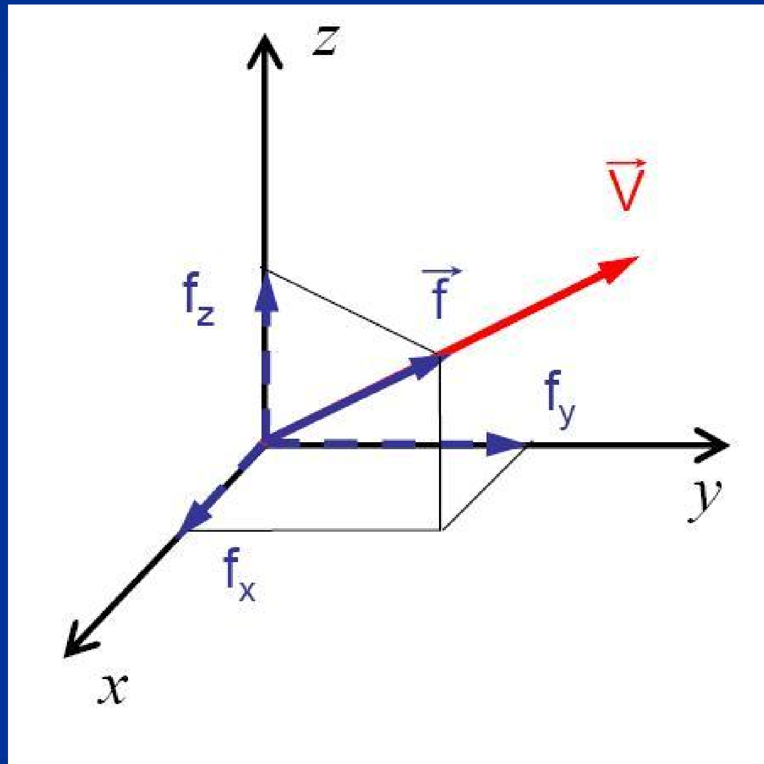


Operace s vektory:

Použití skalárního součinu:

Vyjádření složek vektoru $\vec{V}$ s použitím jednotkového vektoru f ve směru vektoru V

$$\vec{f} = \{f_x; f_y; f_z\} \quad ; \quad |\vec{f}| = f = 1$$



$$V_x = V f_x \qquad V_y = V f_y \qquad V_z = V f_z$$

Nebo také

$$f_x = \cos \alpha \qquad f_y = \cos \beta \qquad f_z = \cos \gamma$$

Operace s vektory:

Skalárním součinem vektorů $\vec{A}$ a $\vec{B}$ je skalár s, pro který platí:

$$s = A\,B \cos j = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Značení: $s = \vec{A} \,.\, \vec{B}$

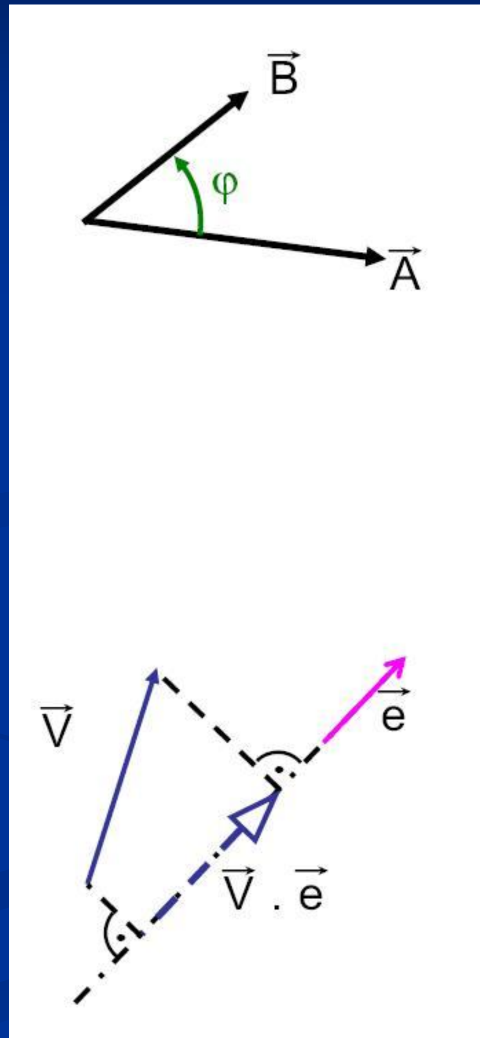
Vlastnosti: pro $\vec{A} \perp \vec{B}$; $\cos j = 0$, $s = 0$

Geometrický význam a použití:

např. vyjádření složek vektoru V

$$V_x = V \cos a = \vec{V}.\overrightarrow{e_1}$$
$$V_y = V \cos b = \vec{V}.\overrightarrow{e_2}$$
$$V_z = V \cos g = \vec{V}.\overrightarrow{e_3}$$

Skalární $\vec{V}.\vec{e}$ vyjadřuje průmět vektoru $\vec{V}$ do osy určené jednotkovým vektorem $\vec{e}$



Operace s vektory:

Vektorovým součinem vektorů $\vec{A}$ a $\vec{B}$ je vektor $\vec{C}$:

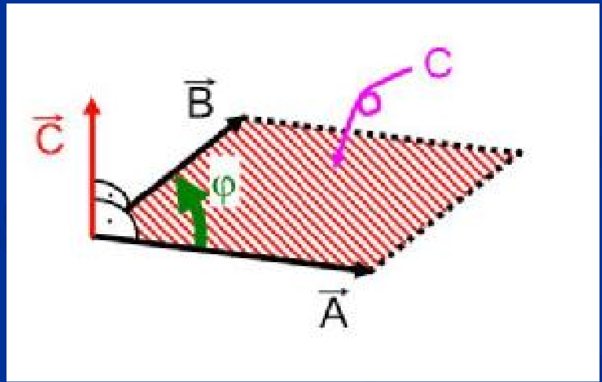
Značení: $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

Vlastnosti: velikost C = A B sin j *plocha dle obrázku*
vektor $\vec{C}$ je kolmý k vektorům $\vec{A}$ a $\vec{B}$
vektory $\vec{A}, \vec{B}$ a $\vec{C}$ tvoří pravotočivou soustavu

$\vec{A} \times \vec{B} = - \vec{B} \times \vec{A}$

$s\,(\vec{A} \times \vec{B}) = (s\,\vec{A}\,) \times \vec{B} = \vec{A} \times (s\,\vec{B})$

$(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{D} = \vec{A} \times \vec{D} + \vec{B} \times \vec{D}$



Vyjádření složek:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = (A_y B_z - B_y A_z)\,\vec{e_1} + (A_z B_x - B_z A_x)\,\vec{e_2} + (A_x B_y - B_x A_y)\,\vec{e_3} =$$

$$= C_x\,\vec{e_1} + C_y\,\vec{e_2} + C_z\,\vec{e_3} = \{C_x, C_y, C_z\}$$

Operace s vektory:

Smíšeným součinem vektorů $\vec{A}$, $\vec{B}$ a $\vec{C}$ je skalár s definovaný determinantem:

$$s = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = A_x\, B_y\, C_z + A_y\, B_z\, C_x + A_z\, B_x\, C_y - A_z\, B_y\, C_x - A_y\, B_x\, C_z - A_x\, B_z\, C_y$$

Značení: s = $(\vec{A} \times \vec{B})\,.\,\vec{C}$

Geometrický význam: **objem rovnoběžnostěnu**

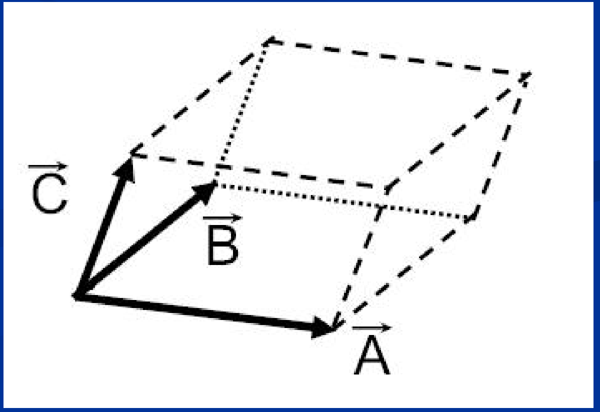
Vlastnosti: $(\vec{A} \times \vec{B})\,.\,\vec{C} > 0$, jestliže vektory $\vec{A}, \vec{B}$ a $\vec{C}$ neleží v jedné rovině a tvoří pravotočivou soustavu

$(\vec{A} \times \vec{B})\,.\,\vec{C} = 0$, jestliže vektory $\vec{A}, \vec{B}$ a $\vec{C}$ leží v jedné rovině nebo je−li aspoň jeden z nich nulový

$(\vec{A} \times \vec{B})\,.\,\vec{C} = \vec{C}.(\vec{A} \times \vec{B})$

$(\vec{A} \times \vec{B})\,.\,\vec{C} = -\,(\vec{B} \times \vec{A})\,.\,\vec{C}$

$(\vec{A} \times \vec{B})\,.\,\vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C})\,.\,\vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A})\,.\,\vec{B}$



Děkuji za pozornost

ftp://ftp.recoc.cz/PRO_STUDENTY/FA_VSUP/2.ROCNIK/

Matice:

Maticí *A* typu (m, n) nazýváme schéma mn reálných, resp, komplexních čísel a_{11}, a_{12}, …., a_{mn}, sestavených v m řádcích a n sloupcích:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$ **Je-li m = m, pak *A* se nazývá čtvercová matice m-tého stupně.**

Prvky a_{11}, a_{22} …. a_{mm} tvoří její hlavní diagonálu.

Matice *A* má hodnost *h*, existuje-li mezi řádky h lineárně nezávislých řádků a je-li každý další řádek matice jejich lineární kombinací.

Transponovaná matice, inverzní , diagonální, jednotková, trojúhelníková, (anti)symetrická, pásová, řídká…..

Determinanty:

Determinantem n-tého stupně matice *A* typu (n, n) nazýváme číslo

$A = \sum (-1)^r \, a_{1k1} \, a_{2k2} \ldots\ldots \, a_{nkn}.$

Příklad: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{11} a_{22}$

Řešení soustav rovnic:

Soustavu n rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{2n}x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots a_{nn}x_n = b_n$$

je možno zapsat maticovou formou

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{matrix} \right|^T = \left| \begin{matrix} b_1 \\ . \\ b_n \end{matrix} \right| .$$

Operace s maticemi:

- Součin matice s číslem
- Součet matic
- Součin matic